Nilai Eigen dan Vektor Eigen Matriks atas Aljabar Max-Plus Interval

[1]M. Andy Rudhito, [2]Sri Wahyuni, [3]Ari Suparwanto, and [4]F. Susilo

[1]Mahasiswa S3 Matematika FMIPA UGM dan Staff Pengajar FKIP Universitas Sanata Dharma
Paingan Maguwoharjo Yogyakarta

[2,3]Jurusan Matematika FMIPA Universitas Gadjah Mada
Sekip Utara Yogyakarta

[4]Jurusan Matematika FST , Universitas Sanata Dharma
Paingan Maguwoharjo Yogyakarta

e-mail : [1]rudhito@staff.usd.ac.id, [2]swahyuni@ugm.ac.id, [3]ari_suparwanto@yahoo.com, [4]fsusilo@staff.usd.ac.id

Abstrak. Makalah ini membahas eksistensi dan ketunggalan nilai eigen dan vektor eigen matriks atas aljabar max-plus interval. Hasil pembahasan menunjukkan bahwa setiap matriks atas aljabar max-plus interval mempunyai nilai eigen, yaitu nilai eigen interval max-plus maksimum, dan vektor eigen interval max-plus yang bersesuaian dengan nilai eigen tersebut. Batas bawah dan batas atas nilai eigen interval max-plus maksimum tersebut berturut-turut adalah nilai eigen max-plus maksimum matriks batas bawah dan nilai eigen max-plus maximum matriks batas atas dari matriks intervalnya. Jika matriks atas aljabar max-plus interval tersebut irredusibel maka nilai eigennya tunggal.

Kata-kata kunci: aljabar max-plus, interval, nilai eigen dan vektor eigen.

1. Pendahuluan

Dalam masalah pemodelan dan analisa suatu jaringan, kadang-kadang waktu aktifitasnya belum diketahui. Hal ini misalkan karena jaringan masih pada tahap perancangan, data-data mengenai waktu aktifitas belum diketahui secara pasti maupun distribusinya. Waktu aktifitas ini dapat diperkirakan berdasarkan pengalaman maupun pendapat dari para ahli maupun operator jaringan tersebut. Untuk itu waktu aktifitas jaringan dimodelkan dalam suatu bilangan kabur (*fuzzy number*). Akhir-akhir ini telah berkembang pemodelan jaringan yang melibatkan bilangan kabur. Untuk masalah penjadwalan yang melibatkan bilangan kabur dapat dilihat pada Chanas, S., Zielinski, P. (2001). Sedangkan untuk masalah model jaringan antrian yang melibatkan bilangan kabur dapat dilihat pada Lüthi, J., Haring, G. (1997).

Pemodelan dan analisa sifat periodik sistem jaringan yang melibatkan bilangan kabur, sejauh penulis ketahui, belum ada yang menggunakan pendekatan aljabar max-plus. Dalam pemodelan suatu sistem jaringan dengan pendekatan aljabar max-plus, graf untuk jaringan tersebut dinyatakan dengan menggunakan matriks, dengan unsur-unsurnya menyatakan waktu aktifitas antar titik pada jaringan tersebut. Selanjutnya sifat periodik sistem dapat dianalisis melalui nilai eigen dan vektor eigen matriks atas aljabar max-plus (selanjutnya cukup disebut nilai eigen dan vektor eigen max-plus) seperti dalam Baccelli et.al (1992), Rudhito A (2003).

Pemodelan waktu aktifitas jaringan dengan menggunakan bilangan kabur dengan pendekatan aljabar max-plus akan terkait dengan matriks yang unsur-unsurnya berupa bilangan kabur. Dengan mengikuti pola pemodelan dan analisa jaringan dengan menggunakan aljabar max-plus, maka konsep dasar yang akan terkait dengan analisa sifat periodik sistem adalah nilai eigen dan vektor eigen matriks atas aljabar max-plus bilangan kabur dari matriks dalam model tersebut. Operasi-operasi pada bilangan kabur dapat dilakukan menggunakan Teorema Dekomposisi, yaitu melalui potongan-potongan-α-nya yang berupa interval-interval (Susilo, F. 2006). Dengan demikian penentuan nilai eigen dan vektor eigen matriks atas aljabar max-plus bilangan kabur melalui Teorema Dekomposisi akan memerlukan hasil-hasil pembahasan nilai eigen dan vektor eigen matriks atas aljabar max-plus interval . Untuk itu dalam makalah ini akan dibahas tentang nilai eigen dan vektor eigen matriks atas aljabar max-plus interval (selanjutnya cukup disebut nilai eigen dan vektor eigen max-plus interval).

Sebelum dibahas hasil utama makalah ini pada bagian 4, terlebih dahulu pada bagian 2 dan 3 akan ditinjau beberapa konsep dasar dan hasil-hasil yang mendukung pembahasan.

2. Aljabar Max-Plus, Nilai Eigen dan Vektor Eigen Max-Plus

Dalam bagian ini dibahas konsep dasar aljabar max-plus dan kaitannya dengan teori graf, serta eksistensi dan ketunggalan nilai eigen dan vektor eigen max-plus. Pembahasan selengkapnya dapat dilihat pada Baccelli et.al (1992), Rudhito A (2003).

Diberikan $\mathbf{R}_\varepsilon := \mathbf{R} \cup \{\varepsilon\}$ dengan $\mathbf{R}$ adalah himpunan semua bilangan real dan $\varepsilon := -\infty$. Pada $\mathbf{R}_\varepsilon$ didefinisikan operasi berikut: $\forall a,b \in \mathbf{R}_\varepsilon$,

$$a \oplus b := \max(a, b) \text{ dan } a \otimes b := a + b.$$

Dapat ditunjukkan bahwa $(\mathbf{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ merupakan semiring komutatif idempoten dengan elemen netral $\varepsilon = -\infty$ dan elemen satuan $e = 0$. Lebih lanjut $(\mathbf{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ merupakan semifield, yaitu bahwa $(\mathbf{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ merupakan semiring komutatif di mana untuk setiap $a \in \mathbf{R}$ terdapat $-a$ sehingga berlaku $a \otimes (-a) = 0$. Kemudian $(\mathbf{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ disebut dengan *aljabar max-plus*, yang selanjutnya cukup dituliskan dengan $\mathbf{R}_{\max}$.

Aljabar max-pus $\mathbf{R}_{\max}$ *tidak memuat pembagi nol* yaitu $\forall\, x,\ y \in \mathbf{R}_{\varepsilon}$ berlaku: jika $x \otimes y = \varepsilon$ maka $x = \varepsilon$ atau $y = \varepsilon$. Relasi "$\preceq_m$" yang didefinisikan pada $\mathbf{R}_{\max}$ dengan $x \preceq_m y \Leftrightarrow x \oplus y = y$ merupakan *urutan parsial* pada $\mathbf{R}_{\max}$. Lebih lanjut relasi ini merupakan *urutan total* pada $\mathbf{R}_{\max}$. Dalam $\mathbf{R}_{\max}$, operasi $\oplus$ dan $\otimes$ *konsisten* terhadap urutan $\preceq_m$, yaitu $\forall a, b, c \in \mathbf{R}_{\max}$, jika $a \preceq_m b$, maka $a \oplus c \preceq_m b \oplus c$, dan $a \otimes c \preceq_m b \otimes c$. Pangkat k dari elemen $x \in \mathbf{R}$ dilambangkan dengan $x^{\otimes k}$ didefinisikan sebagai berikut: $x^{\otimes 0} := 0$ dan $x^{\otimes k} := x \otimes x^{\otimes k-1}$, dan didefinisikan pula $\varepsilon^{\otimes 0} := 0$ dan $\varepsilon^{\otimes k} := \varepsilon$, untuk $k = 1, 2, \ldots$.

Operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada $\mathbf{R}_{\max}$ dapat diperluas untuk operasi-operasi matriks dalam $\mathbf{R}_{\max}^{m\times n} := \{A = (A_{ij}) \mid A_{ij} \in \mathbf{R}_{\max}$, untuk $i = 1, 2, \ldots, m$ dan $j = 1, 2, \ldots, n\}$. Untuk $\alpha \in \mathbf{R}_{\max}$, dan $A, B \in \mathbf{R}_{\max}^{m\times n}$ didefinisikan $\alpha \otimes A$, dengan $(\alpha \otimes A)_{ij} = \alpha \otimes A_{ij}$ dan $A \oplus B$, dengan $(A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij}$ untuk $i = 1, 2, \ldots, m$ dan $j = 1, 2, \ldots, n$. Untuk $A \in \mathbf{R}_{\max}^{m\times p}$, $B \in \mathbf{R}_{\max}^{p\times n}$ didefinisikan $A \otimes B$, dengan $(A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^{p} A_{ik} \otimes B_{kj}$. Didefinisikan matriks $E \in \mathbf{R}_{\max}^{n\times n}$, $(E)_{ij} := \begin{cases} 0 \ , & \text{jika } i = j \\ \varepsilon \ , & \text{jika } i \neq j \end{cases}$ dan matriks $\varepsilon \in \mathbf{R}_{\max}^{m\times n}$, $(\varepsilon)_{ij} := \varepsilon$ untuk setiap i dan j . Dapat ditunjukkan bahwa ($\mathbf{R}_{\max}^{n\times n}$, $\oplus$, $\otimes$) merupakan semiring idempoten dengan elemen netral matriks ε dan elemen satuan matriks E. Sedangkan $\mathbf{R}_{\max}^{m\times n}$ merupakan semimodul atas $\mathbf{R}_{\max}$. Pangkat k dari matriks $A \in \mathbf{R}_{\max}^{nxn}$ dalam aljabar max-plus didefinisikan dengan: $A^{\otimes 0} = E_n$ dan $A^{\otimes k} = A \otimes A^{\otimes k-1}$ untuk $k = 1, 2, \ldots$. Relasi "$\preceq_m$" yang didefinisikan pada $\mathbf{R}_{\max}^{m\times n}$ dengan $A \preceq_m B \Leftrightarrow A \oplus B = B$ merupakan urutan parsial pada $\mathbf{R}_{\max}^{m\times n}$. Perhatikan bahwa $A \preceq_m B \Leftrightarrow A \oplus B = B \Leftrightarrow A_{ij} \oplus B_{ij} = B_{ij} \Leftrightarrow A_{ij} \preceq_m B_{ij}$ untuk setiap i dan j. Dalam ($\mathbf{R}_{\max}^{m\times n}$, $\oplus$, $\otimes$), operasi $\oplus$ dan $\otimes$ konsisten terhadap urutan $\preceq_m$, yaitu $\forall A, B, C \in \mathbf{R}_{\max}^{n\times n}$, jika $A \preceq_m B$, maka $A \oplus C \preceq_m B \oplus C$, dan $A \otimes C \preceq_m B \otimes C$.

Didefinisikan $\mathbf{R}_{\max}^{n} := \{\ \mathbf{x} = [\ x_1, x_2, \ldots, x_n]^{\mathrm{T}} \mid x_i \in \mathbf{R}_{\max},\ i = 1, 2, \ldots, n\}$. Perhatikan bahwa $\mathbf{R}_{\max}^{n}$ dapat dipandang sebagai $\mathbf{R}_{\max}^{n\times 1}$, sehingga $\mathbf{R}_{\max}^{n}$ merupakan semimodul atas $\mathbf{R}_{\max}$. Unsur-unsur dalam $\mathbf{R}_{\max}^{n}$ disebur *vektor* atas $\mathbf{R}_{\max}$.

Suatu *graf berarah* $\mathcal{G}$ didefinisikan sebagai suatu pasangan $\mathcal{G}$ = (V, A) dengan V adalah suatu himpunan berhingga tak kosong yang anggotanya disebut *titik* dan A adalah suatu himpunan pasangan terurut titik-titik. Anggota A disebut *busur*. Suatu *lintasan* dalam graf berarah $\mathcal{G}$ adalah suatu barisan berhingga busur $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \ldots, (i_{l-1}, i_l)$ dengan $(i_k, i_{k+1}) \in$ A untuk suatu $l \in \mathbf{N}$ (= himpunan semua bilangan asli), dan $k = 1, 2, \ldots, l - 1$. Suatu lintasan disebut *sirkuit* jika titik awal dan titik akhirnya sama. *Sirkuit elementer* adalah sirkuit yang titik-titiknya muncul tidak lebih dari sekali, kecuali titik awal yang muncul tepat dua kali. Suatu graf berarah $\mathcal{G}$ = (V, A) dengan V = $\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, , \ldots, \mathbf{n}\}$ dikatakan *terhubung kuat* jika untuk setiap $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in$ V, $\mathbf{i} \neq \mathbf{j}$, terdapat suatu lintasan dari **i** ke **j**.

Diberikan graf berarah $\mathcal{G}$ = (V, A) dengan V = $\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots, \mathbf{p}\}$. Graf berarah $\mathcal{G}$ dikatakan *berbobot* jika setiap busur $(j, i) \in$ A dikawankan dengan suatu bilangan real A_{ij}. Bilangan real A_{ij} disebut *bobot* busur (j, i), dilambangkan dengan $w(j, i)$. *Graf preseden* dari matriks $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$ adalah graf berarah berbobot $\mathcal{G}(A)$ = (V, A) dengan V = $\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots, \mathbf{n}\}$, A = $\{(\mathbf{j}, \mathbf{i}) | w(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = A_{\mathbf{ij}} \neq \varepsilon\}$. *Bobot suatu lintasan* didefinisikan sebagai jumlahan bobot busur-busur yang menyusun tersebut . Suatu rumus bobot rata-rata maksimum sirkuit elementer dalam $\mathcal{G}(A)$, dilambangkan dengan $\lambda_{\max}(A)$), adalah $\lambda_{\max}(A) = \bigoplus_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} \bigoplus_{i=1}^{n} (A^{\otimes k})_{ii}\right)$.

Suatu matriks $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$ dikatakan *semi-definit* jika semua sirkuit dalam $\mathcal{G}(A)$ mempunyai bobot takpositif dan dikatakan *definit* jika semua sirkuit dalam $\mathcal{G}(A)$ mempunyai bobot negatif. Diberikan $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$. Dapat ditunjukkan bahwa jika A semi-definit, maka $\forall p \geq n$, $A^{\otimes p} \preceq_{m} E \oplus A \oplus \ldots \oplus A^{\otimes n-1}$. Diberikan matriks semi-definit $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$. Didefinisikan $A^* := E \oplus A \oplus \ldots \oplus A^{\otimes n} \oplus A^{\otimes n+1} \oplus \ldots$. Suatu matriks $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$ dikatakan *irredusibel* jika graf presedennya terhubung kuat. Dapat ditunjukkan bahwa matriks $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$ irredusibel jika dan hanya jika $(A \oplus A^{\otimes 2} \oplus \ldots \oplus A^{\otimes n-1})_{ij} \neq \varepsilon$, untuk setiap i, j dengan $i \neq j$.

Diberikan $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$. Skalar $\lambda \in \mathbf{R}_{\max}$ disebut *nilai eigen max-plus matriks A* jika terdapat suatu vektor $\boldsymbol{v} \in \mathbf{R}_{\max}^{n}$ dengan $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{\varepsilon}_{n\times 1}$ sehingga $A \otimes \boldsymbol{v} = \lambda \otimes \boldsymbol{v}$. Vektor $\boldsymbol{v}$

tersebut disebut *vektor eigen max-plus matriks A yang bersesuaian dengan* λ. Diberikan $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n\times n}$. Dapat ditunjukkan bahwa skalar $\lambda_{\max}(A)$, yaitu bobot rata-rata maksimum sirkuit elementer dalam $\mathcal{G}(A)$, merupakan suatu nilai eigen max-plus matriks A. Lebih lanjut untuk $B = -\lambda_{\max}(A) \otimes A$, jika $B_{ii}^{+} = 0$, maka kolom ke-i matriks B^{*} merupakan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_{\max}(A)$. Kolom-kolom ke-i matriks B^{*} di atas, yang merupakan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_{\max}(A)$, disebut *vektor-vektor eigen fundamental* yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_{\max}(A)$. Dapat ditunjukkan bahwa kombinasi linear max-plus vektor-vektor eigen fundamental matriks A juga merupakan vektor eigen yang berseuaian dengan $\lambda_{\max}(A)$. Jika skalar $\lambda \in \mathbf{R}_{\max}$, merupakan nilai eigen max-plus matriks A, maka λ merupakan bobot rata-rata suatu sirkuit dalam $\mathcal{G}(A)$, sehingga $\lambda_{\max}(A)$ merupakan nilai eigen max-plus maksimum matriks A. Dapat ditunjukkan bahwa jika matriks irredusibel $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n\times n}$ mempunyai nilai eigen max-plus λ dengan $\mathbf{x}$ sebagai vektor eigen max-plus yang bersesuaian dengan λ, maka $x_i \neq \varepsilon$ untuk setiap $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Dapat ditunjukkan bahwa jika matriks $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n\times n}$ irredusibel, maka A mempunyai nilai eigen max-plus tunggal, yaitu $\lambda_{\max}(A)$.

3. Aljabar Max-Plus Interval dan Matriks atas Aljabar Max-Plus Interval

Bagian ini membahas konsep dasar dan teknik pengoperasian matriks atas aljabar max-plus interval. Pembahasan lebih lengkap dapat dilihat pada Rudhito, A. dkk (2008a, 2008b).

Interval (tertutup) x dalam $\mathbf{R}_{\max}$ adalah suatu himpunan bagian dari $\mathbf{R}_{\max}$ yang berbentuk $\mathrm{x} = [\underline{\mathrm{x}}, \overline{\mathrm{x}}] = \{x \in \mathbf{R}_{\max} \mid \underline{\mathrm{x}}\ \underline{\pi}_{\mathrm{m}}\ x\ \underline{\pi}_{\mathrm{m}}\ \overline{\mathrm{x}}\}$. Interval x dalam $\mathbf{R}_{\max}$ di atas disebut *interval max-plus*, yang selanjutnya akan cukup disebut interval. Suatu bilangan $x \in \mathbf{R}_{\max}$ dapat dinyatakan sebagai interval $[x, x]$. Didefinisikan $\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\varepsilon} := \{ \mathrm{x} = [\underline{\mathrm{x}}, \overline{\mathrm{x}}] \mid \underline{\mathrm{x}}, \overline{\mathrm{x}} \in \mathbf{R},\ \varepsilon\ \pi_{\mathrm{m}}\ \underline{\mathrm{x}}\ \underline{\pi}_{\mathrm{m}}\ \overline{\mathrm{x}}\} \cup \{ \varepsilon \}$, dengan $\varepsilon := [\varepsilon, \varepsilon]$.

Pada $\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\varepsilon}$ didefinisikan operasi $\overline{\oplus}$ dan $\overline{\otimes}$ dengan: $\mathrm{x}\ \overline{\oplus}\ \mathrm{y} = [\underline{\mathrm{x}} \oplus \underline{\mathrm{y}}, \overline{\mathrm{x}} \oplus \overline{\mathrm{y}}]$ dan $\mathrm{x}\ \overline{\otimes}\ \mathrm{y} = [\underline{\mathrm{x}} \otimes \underline{\mathrm{y}}, \overline{\mathrm{x}} \otimes \overline{\mathrm{y}}]$, $\forall$ x, y $\in \mathbf{I}(\mathbf{R}_{\varepsilon})$. Dapat ditunjukkan bahwa $(\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\varepsilon}, \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$ merupakan semiring idempoten komutatif dengan elemen netral $\varepsilon = [\varepsilon, \varepsilon]$ dan elemen satuan 0 = [0, 0]. Semiring idempoten komutatif $(\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\varepsilon}, \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$ selanjutnya disebut dengan *aljabar max-plus interval* yang dilambangkan dengan $\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}$.

Didefinisikan $\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{m\times n} := \{A = (A_{ij}) \mid A_{ij} \in \mathbf{I}(\mathbf{R}_{\max})$, untuk $i = 1, 2, ..., m$ dan $j = 1, 2, ..., n\}$. Matriks anggota $\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{m\times n}$ disebut *matriks interval max-plus*. Selanjutnya matriks interval max-plus cukup disebut dengan matriks interval. Untuk $\alpha \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}$, A, B $\in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{m\times n}$, didefinisikan $\alpha \overline{\otimes} A$, dengan $(\alpha \overline{\otimes} A)_{ij} = \alpha \overline{\otimes} A_{ij}$ dan $A \overline{\oplus} B$, dengan $(A \overline{\oplus} B)_{ij} = A_{ij} \overline{\oplus} B_{ij}$ untuk $i = 1, 2, ..., m$ dan $j = 1, 2, ..., n$. Untuk A $\in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{m\times p}$, B $\in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{p\times n}$, didefinisikan $A \overline{\otimes} B$ dengan $(A \overline{\otimes} B)_{ij} = \overline{\bigoplus_{k=1}^{p}} A_{ik} \overline{\otimes} B_{kj}$ untuk $i = 1, 2, ..., m$ dan $j = 1, 2, ..., n$. $(\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{n\times n}, \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$ merupakan semiring idempoten dengan elemen netral matriks ε dengan $(\varepsilon)_{ij} := \varepsilon$ untuk setiap i , j dan elemen satuan adalah matriks E, dengan $(E)_{ij} := \begin{cases} 0 \ , \ \text{jika } i = j \\ \varepsilon \ , \ \text{jika } i \neq j \end{cases}$. Sedangkan $\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{m\times n}$ merupakan semimodul atas $\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}$,

Untuk A $\in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{m\times n}$ didefinisikan matriks $\underline{A} = (\underline{A}_{ij}) \in \mathbf{R}_{\max}^{m\times n}$ dan $\overline{A} = (\overline{A}_{ij}) \in \mathbf{R}_{\max}^{m\times n}$ yang berturut-turut disebut *matriks batas bawah* dan *matriks batas atas* dari matriks interval A. Diberikan matriks interval A $\in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{m\times n}$, dengan $\underline{A}$ dan $\overline{A}$ berturut-turut adalah matriks batas bawah dan matriks batas atasnya. Didefinisikan *interval matriks dari* A, yaitu $[\underline{A}, \overline{A}] = \{ A \in \mathbf{R}_{\max}^{m\times n} \mid \underline{A} \ \underline{\pi}_{\mathrm{m}} \ A \ \underline{\pi}_{\mathrm{m}} \ \overline{A} \}$ dan $\mathbf{I}(\mathbf{R}_{\max}^{m\times n})^{*} = \{ [\underline{A}, \overline{A}] \mid A \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{m\times n} \}$. Untuk $\alpha \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}$, $[\underline{A}, \overline{A}], [\underline{B}, \overline{B}] \in \mathbf{I}(\mathbf{R}_{\max}^{m\times n})^{*}$, didefinisikan $\alpha \overline{\otimes} [\underline{A}, \overline{A}] = [\underline{\alpha} \otimes \underline{A}, \overline{\alpha} \otimes \overline{A}]$ dan $[\underline{A}, \overline{A}] \overline{\oplus} [\underline{B}, \overline{B}] = [\underline{A} \oplus \underline{B}, \overline{A} \oplus \overline{B}]$. Untuk $[\underline{A}, \overline{A}] \in \mathbf{I}(\mathbf{R}_{\max}^{m\times p})^{*}$, $[\underline{B}, \overline{B}] \in \mathbf{I}(\mathbf{R}_{\max}^{p\times n})^{*}$, didefinisikan $[\underline{A}, \overline{A}] \overline{\otimes} [\underline{B}, \overline{B}] = [\underline{A} \otimes \underline{B}, \overline{A} \otimes \overline{B}]$. $(\mathbf{I}(\mathbf{R}_{\max}^{n\times n})^{*}, \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$ merupakan semiring idempoten dengan elemen netral adalah interval matriks $[\varepsilon, \varepsilon]$ dan elemen satuan adalah interval matriks [E, E]. Sedangkan $\mathbf{I}(\mathbf{R}_{\max}^{m\times n})^{*}$ merupakan semimodul atas $\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}$.

Semiring $(\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{n\times n}, \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$ isomorfis dengan semiring $(\mathbf{I}(\mathbf{R}_{\max}^{n\times n})^{*}, \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$, dengan pemetaan $f : \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{n\times n} \rightarrow \mathbf{I}(\mathbf{R}_{\max}^{n\times n})^{*}$, $f(A) = [\underline{A}, \overline{A}]$, $\forall A \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{n\times n}$. Sedangkan semimodul $\mathbf{I(R)}_{\max}^{m\times n}$ atas $\mathbf{I(R)}_{\max}$ isomorfis dengan semimodul $\mathbf{I}(\mathbf{R}_{\max}^{m\times n})^*$ atas $\mathbf{I(R)}_{\max}$ Dengan demikan untuk setiap matriks interval A selalu dapat ditentukan *interval matriks* $[\underline{A}, \overline{A}]$ dan sebaliknya untuk setiap interval matriks $[\underline{A}, \overline{A}] \in \mathbf{I}(\mathbf{R}_{\max}^{n\times n})^*$, maka $\underline{A}, \overline{A} \in \mathbf{R}_{\max}^{n\times n}$, sehingga dapat ditentukan matriks interval $A \in \mathbf{I(R)}_{\max}^{n\times n}$, di mana $[\underline{A}_{ij}, \overline{A}_{ij}] \in \mathbf{I(R)}_{\max}$, $\forall i$ dan j. Dengan demikian matriks interval $A \in \mathbf{I(R)}_{\max}^{m\times n}$ dapat dipandang sebagai interval matriks $[\underline{A}, \overline{A}] \in \mathbf{I}(\mathbf{R}_{\max}^{m\times n})^*$. Interval matriks $[\underline{A}, \overline{A}] \in \mathbf{I}(\mathbf{R}_{\max}^{n\times n})^*$ disebut *interval matriks yang bersesuaian dengan matriks interval* $A \in \mathbf{I(R)}_{\max}^{n\times n}$ dan dilambangkan dengan $A \approx [\underline{A}, \overline{A}]$. Akibat isomorfisma di atas, maka berlaku $\alpha \,\overline{\otimes}\, A \approx [\underline{\alpha} \otimes \underline{A}, \overline{\alpha} \otimes \overline{A}]$, $A \,\overline{\oplus}\, B \approx [\underline{A} \oplus \underline{B}, \overline{A} \oplus \overline{B}]$ dan $A \,\overline{\otimes}\, B \approx [\underline{A} \otimes \underline{B}, \overline{A} \otimes \overline{B}]$.

Didefinisikan $\mathbf{I(R)}_{\max}^{n} := \{\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \mid x_i \in \mathbf{I(R)}_{\max}, i = 1, 2, \dots, n\}$. Himpunan $\mathbf{I(R)}_{\max}^{n}$ dapat dipandang sebagai $\mathbf{I(R)}_{\max}^{n\times 1}$. Unsur-unsur dalam $\mathbf{I(R)}_{\max}^{n}$ disebut *vektor interval atas* $\mathbf{I(R)}_{\max}$. Vektor interval $\mathbf{x}$ bersesuaian dengan *interval vektor* $[\underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}]$, yaitu $\mathbf{x} \approx [\underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}]$.

4. Nilai Eigen dan Vektor Eigen Max-Plus Interval

Definisi 4.1

Diberikan $A \in \mathbf{I(R)}_{\max}^{n\times n}$. Skalar interval $\lambda \in \mathbf{I(R)}_{\max}$ disebut *nilai eigen max-plus interval matriks interval* A jika terdapat suatu vektor interval $\mathbf{v} \in \mathbf{I(R)}_{\max}^{n}$ dengan $\mathbf{v} \neq \varepsilon_{n\times 1}$ sehingga $A \,\overline{\otimes}\, \mathbf{v} = \lambda \,\overline{\otimes}\, \mathbf{v}$. Vektor $\mathbf{v}$ tersebut disebut *vektor eigen max-plus interval matriks interval* A *yang bersesuaian dengan* λ.

Berikut diberikan suatu teorema yang memberikan eksistensi nilai eigen interval max-plus suatu matriks interval.

Teorema 4.1

Diberikan $A \in \mathbf{I(R)}_{\max}^{n\times n}$, dengan $A \approx [\underline{A}, \overline{A}]$. Skalar interval $\lambda_{\max}(A) = [\lambda_{\max}(\underline{A}), \lambda_{\max}(\overline{A})]$, merupakan suatu nilai eigen max-plus interval matriks interval A. Vektor interval $\mathbf{v} \approx [\underline{\mathbf{v}}, \overline{\mathbf{v}}]$, di mana $\underline{\mathbf{v}}$ dan $\overline{\mathbf{v}}$ berturut-turut adalah vektor eigen max-plus yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_{\max}(\underline{\mathrm{A}})$ dan $\lambda_{\max}(\overline{\mathrm{A}})$, sedemikan hingga $\underline{\mathbf{v}}$ $\underline{\pi}_{\mathrm{Im}}$ $\overline{\mathbf{v}}$, merupakan vektor eigen max-plus interval matriks A yang bersesuaian dengan $\lambda_{\max}(\mathrm{A})$.

Bukti:

Untuk setiap matriks $A \in [\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}}]$, berlaku $\underline{\mathrm{A}}$ $\underline{\pi}_{\mathrm{m}}$ A_{ij} $\underline{\pi}_{\mathrm{m}}$ $\overline{\mathrm{A}}$. Karena sifat kekonsistenan operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada matriks terhadap urutan "$\underline{\pi}_{\mathrm{m}}$", maka berlaku $\underline{\mathrm{A}}^{\otimes k}$ $\underline{\pi}_{\mathrm{m}}$ $A^{\otimes k}$ $\underline{\pi}_{\mathrm{m}}$ $\overline{\mathrm{A}}^{\otimes k}$, untuk k = 1, 2, ... , sehingga berlaku $\bigoplus_{k=1}^{n} (\frac{1}{k} \bigoplus_{\mathrm{i}=1}^{n} (\underline{\mathrm{A}}^{\otimes k})_{ii})$ $\underline{\pi}_{\mathrm{m}}$ $\bigoplus_{k=1}^{n} (\frac{1}{k} \bigoplus_{\mathrm{i}=1}^{n} (A^{\otimes k})_{ii})$ $\underline{\pi}_{\mathrm{m}}$ $\bigoplus_{k=1}^{n} (\frac{1}{k} \bigoplus_{\mathrm{i}=1}^{n} (\overline{\mathrm{A}}^{\otimes k})_{ii})$, atau $\lambda_{\max}(\underline{\mathrm{A}})$ $\underline{\pi}_{\mathrm{m}}$ $\lambda_{\max}(A)$ $\underline{\pi}_{\mathrm{m}}$ $\lambda_{\max}(\overline{\mathrm{A}})$.

Jadi $[\lambda_{\max}(\underline{\mathrm{A}}), \lambda_{\max}(\overline{\mathrm{A}})]$ adalah suatu interval.

Ambil $\lambda_{\max}(\mathrm{A}) = [\lambda_{\max}(\underline{\mathrm{A}}), \lambda_{\max}(\overline{\mathrm{A}})]$. Menurut hasil pada bagian 2 di atas, untuk $\underline{\mathrm{B}} = -\lambda_{\max}(\underline{\mathrm{A}}) \otimes \underline{\mathrm{A}}$, jika $\underline{\mathrm{B}}^{+}_{ii} = 0$, maka kolom ke-$i$ matriks $\underline{\mathrm{B}}^{*}$ merupakan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_{\max}(\underline{\mathrm{A}})$, demikian juga analog untuk $\overline{\mathrm{B}}$. Ambil $\underline{\mathbf{v}}$ dan $\overline{\mathbf{v}}$, di mana berturut-turut adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_{\max}(\underline{\mathrm{A}})$ dan $\lambda_{\max}(\overline{\mathrm{A}})$, sedemikan hingga $\underline{\mathbf{v}}$ $\underline{\pi}_{\mathrm{m}}$ $\overline{\mathbf{v}}$, jika diperlukan dapat dibentuk kombinasi linear vektor-vektor eigen fundamental yang terkait, sehingga diperoleh $\underline{\mathbf{v}}$ $\underline{\pi}_{\mathrm{m}}$ $\overline{\mathbf{v}}$. Ambil vektor interval $\mathbf{v} \approx [\underline{\mathbf{v}}, \overline{\mathbf{v}}]$, maka $[\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}}] \overline{\otimes} [\underline{\mathbf{v}}, \overline{\mathbf{v}}] = [\lambda_{\max}(\underline{\mathrm{A}}), \lambda_{\max}(\overline{\mathrm{A}})] \overline{\otimes} [\underline{\mathbf{v}}, \overline{\mathbf{v}}]$, yang berarti juga bahwa $\mathrm{A} \overline{\otimes} \mathbf{v} = \lambda \overline{\otimes} \mathbf{v}$. Jadi skalar interval $\lambda_{\max}(\mathrm{A}) = [\lambda_{\max}(\underline{\mathrm{A}}), \lambda_{\max}(\overline{\mathrm{A}})]$, merupakan suatu nilai eigen max-plus interval matriks interval A. ■

Berikut diberikan suatu teorema yang memberikan ketunggalan nilai eigen interval max-plus suatu matriks interval. Sebelumnya akan diberikan definisi dan syarat cukup dan perlu irredusibilitas suatu matriks interval.

Definisi 4.2

Suatu matriks interval $\mathrm{A} \in \mathbf{I}(\mathbf{R})^{n \times n}_{\max}$, dengan $\mathrm{A} \approx [\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}}]$, dikatakan *irredusibel* jika setiap matriks $A \in [\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}}]$ irredusibel.

Teorema berikut memberikan syarat perlu dan cukup suatu matriks interval irredusibel.

Teorema 4.2

Suatu matriks interval A $\in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{n\times n}$, dengan A $\approx [\underline{A}, \overline{A}]$, irredusibel jika dan hanya jika $\underline{A} \in \mathbf{R}_{\max}^{n\times n}$ irredusibel.

Bukti:

($\Rightarrow$): Jelas berlaku menurut Definisi 4.2 di atas.

($\Leftarrow$): Untuk setiap matriks $A \in [\underline{A}, \overline{A}]$, berlaku $\underline{A} \preceq_m A \preceq_m \overline{A}$. Karena sifat kekonsistenan operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada matriks terhadap urutan "$\preceq_m$", maka berlaku

$$(\underline{A} \oplus \underline{A}^{\otimes^2} \oplus \ldots \oplus \underline{A}^{\otimes^{n-1}}) \preceq_m (A \oplus A^{\otimes^2} \oplus \ldots \oplus A^{\otimes^{n-1}})$$

$$\preceq_m (\overline{A} \oplus \overline{A}^{\otimes^2} \oplus \ldots \oplus \overline{A}^{\otimes^{n-1}}),$$ yang berarti berlaku juga

$$(\underline{A} \oplus \underline{A}^{\otimes^2} \oplus \ldots \oplus \underline{A}^{\otimes^{n-1}})_{ij} \preceq_m (A \oplus A^{\otimes^2} \oplus \ldots \oplus A^{\otimes^{n-1}})_{ij}$$

$$\preceq_m (\overline{A} \oplus \overline{A}^{\otimes^2} \oplus \ldots \oplus \overline{A}^{\otimes^{n-1}})_{ij}$$

untuk setiap i dan j. Karena $\underline{A}$ irredusibel, maka menurut hasil pada bagian 2 di atas, $(\underline{A} \oplus \underline{A}^{\otimes^2} \oplus \ldots \oplus \underline{A}^{\otimes^{n-1}})_{ij} \neq \varepsilon$ untuk setiap i, j dengan $i \neq j$. Dengan demikan untuk setiap matriks $A \in [\underline{A}, \overline{A}]$ juga berlaku bahwa $(A \oplus A^{\otimes^2} \oplus \ldots \oplus A^{\otimes^{n-1}})_{ij} \neq \varepsilon$ untuk setiap i, j dengan $i \neq j$, sehingga menurut menurut hasil pada bagian 2 di atas A irredusibel. Jadi terbukti bahwa matriks interval A $\in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{m\times n}$ irredusibel. ■

Akibat 4.3

Diberikan A $\in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{n\times n}$, dengan A $\approx [\underline{A}, \overline{A}]$. Jika matriks interval A irredusibel, maka $\lambda_{\max}$(A) = [$\lambda_{\max}(\underline{A})$, $\lambda_{\max}(\overline{A})$] merupakan nilai eigen interval max-plus tunggal matriks interval A.

Bukti:

Jika matriks interval A iredusibel, maka $\forall A \in [\underline{A}, \overline{A}]$ irredusibel, sehingga menurut hasil pada bagian 2, $\lambda_{\max}(A)$ merupakan nilai eigen max-plus tunggal matriks A. Dengan cara yang analog dengan pembuktian Teorema 4.1 di atas dapat disimpulkan bahwa $\lambda_{\max}(\mathrm{A}) = [\lambda_{\max}(\underline{A}), \lambda_{\max}(\overline{A})]$, merupakan nilai eigen max-plus interval tunggal matriks interval A. ■

Contoh 4.1

Akan ditentukan nilai eigen dan vektor eigen max-plus interval dari matriks

A= $\begin{bmatrix} [-2,-1] & [3,4] & [1,2] \\ [1,2] & [1,1] & [\varepsilon,\varepsilon] \\ [\varepsilon,\varepsilon] & [2,4] & [-1,1] \end{bmatrix}$. Perhatikan bahwa $\underline{A} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & -1 \end{bmatrix}$ dan $\overline{A} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & 1 \end{bmatrix}$. Untuk $\underline{A}$ diperoleh bahwa $\lambda_{\max}(\underline{A}) = 2$ dengan vektor-vektor eigen fundamentalnya adalah $[0, -1, -1]^T$ dan $[1, 0, 0]^T$. Untuk $\overline{A}$ diperoleh bahwa $\lambda_{\max}(\overline{A}) = 3$ dengan vektor-vektor eigen fundamentalnya adalah $[0, 1, 0]^T$ dan $[1, 0, 1]^T$. Vektor interval $\mathbf{v} = [[0, 0], [-1,1], [-1,0]]^T$, merupakan vektor eigen interval max-plus matriks interval A yang bersesuaian dengan $\lambda_{\max}(\mathrm{A}) = [2, 3]^T$. Perhatikan bahwa $\underline{A}$ irredusibel sehingga vektor eigen interval max-plus yang diperoleh adalah tunggal.

5. Kesimpulan

Dapat disimpilkan bahwa setiap matriks interval persegi, yaitu matriks persegi dengan unsur-unsurnya berupa interval, mempunyai nilai eigen interval max-plus, yaitu nilai eigen interval max-plus maksimum, dan vektor eigen interval max-plus. Batas bawah dan batas atas nilai eigen interval max-plus maksimum tersebut berturut-turut adalah nilai eigen max-plus matriks batas bawah dan nilai eigen max-plus matriks batas atas dari matriks intervalnya. Jika matriks tersebut irredusibel maka nilai eigen interval tersebut tunggal.

Kepustakaan

Bacelli, F., *et al.* 2001. *Synchronization and Linearity*. New York: John Wiley & Sons.

Chanas, S., Zielinski, P. 2001. Critical path analysis in the network with fuzzy activity times. *Fuzzy Sets and Systems.* 122 (2001) 195–204.

Lüthi, J., Haring, G. 1997. Fuzzy Queueing Network Models of Computing Systems. *Proceedings of the 13th UK Performance Engineering Workshop*, Ilkley, UK, Edinburgh University Press, July 1997.

Rudhito, Andy. 2003. *Sistem Linear Max-Plus Waktu-Invariant*. Tesis: Program Pascasarjana Universitas Gadjah Mada. Yogyakarta.

Rudhito, Andy, dkk. 2008a. "Aljabar Max-Plus Interval". Prosiding Seminar Nasional Matematika S3 UGM. Yogyakarta. 31 Mei 2008.

Rudhito, Andy, dkk. 2008b. "Matriks atas Aljabar Max-Plus Interval". Prosiding Seminar Nasional Matematika S3 UGM. Yogyakarta. 31 Mei 2008.

Susilo, F. 2006. Himpunan dan Logika Kabur serta Aplikasinya edisi kedua. Graha Ilmu, Yogyakarta.